数理解析研究所講究録
第 1683 巻 2010 年 25-38

均衡問題に関する収束定理
Convergence theorems for an equilibrium problem

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47J05, 47J25.
Keywords and phrases. 均衡問題, リゾルベント, 非拡大写像, 不動点, 収束定理.

1 序論

近年, 均衡問題に関する収束定理, つまり, 均衡問題の解の近似理論に関する定理が多く報告されている。それらのほとんどは, 本稿の第 3 節で述べるリゾルベントと呼ばれる非拡大写像を用いていることから, 非拡大写像 (列) に関する収束定理の研究と見なすことができる。本稿の第 4 節では, 均衡問題に変分不等式問題, 不動点問題などが絡む複雑な問題を取り上げ, そのような問題の解の近似定理もやはり非拡大写像列に関する収束定理に帰着できることを説明する。その際, 特に重要な役割を演じるのが, 第 2 節に記した強非拡大性に関する結果である。

2 準備

本稿では, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像, $\mathbb{R}$ を実数の集合, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。H の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$ と表し, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す。

C を H の空でない部分集合とし, T を C から H への写像とする。写像 T の不動点の集合を $\mathrm{Fix}(T)$ で表す。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。C が閉凸で T が非拡大であるとき, $\mathrm{Fix}(T)$ は閉凸であることが知られている。さらにこのとき, $I - T$ は demiclosed, つまり, $x_n - Tx_n \to 0$ かつ $x_n \rightharpoonup u$ ならば $u \in \mathrm{Fix}(T)$ であることが知られている。非拡大写像 T が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して

$$x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n) \to 0$$

が成り立つときをいう [10]。強非拡大写像と強非拡大写像の合成は強非拡大であることが知られている。強非拡大写像について詳しくは, [10] を参照するとよい。写像 T が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$$

が成り立つときをいう。堅非拡大写像は強非拡大であることが知られている。堅非拡大写像について詳しくは, [12] を参照するとよい。非拡大写像の不動点集合に関する次の性質は重要である。

補助定理 2.1 ([3, Corollary 3,6] または [2, Corollary 3.8]). C と D を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $S\colon C \to H$ と $T\colon D \to H$ を非拡大写像とし, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ および $T(D) \subset C$ を仮定する。もし, S と T のどちらかが強非拡大ならば, $F(ST) = F(S) \cap F(T)$ が成り立つ。

C を H の空でない閉凸部分集合とする。各 $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

を満たす点 $z \in C$ が唯一存在する。この z を $P_C(x)$ で表し, P_C は H から C の上への距離射影と呼ばれる。P_C は堅非拡大であることが知られている。

写像 $A\colon C \to H$ が逆強単調 (inverse-strongly-monotone) であるとは, ある正の実数 α が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう。このとき, A を α-逆強単調写像と呼ぶことがある。以下, α-逆強単調写像といったときには, 正の定数 α が与えられるものとする。α-逆強単調写像は $1/\alpha$-Lipschitz 連続であり, さらに

- $0 \leq \lambda \leq 2\alpha$ のとき, $I - \lambda A$ は非拡大;
- $0 < \lambda < 2\alpha$ のとき, $I - \lambda A$ は強非拡大

であることが知られている (詳しくは, [20] および [2] を参照)。

C から H への非拡大写像の列 $\{T_n\}$ が強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは, $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|T_n x_n - T_n y_n\| \to 0$ となる C 任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して

$$x_n - y_n - (T_n x_n - T_n y_n) \to 0$$

が成り立つときをいう。強非拡大列については, 次のことが知られている。

補助定理 2.2 ([2, Example 3.2, 3.3]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, $\{T_n\}$ を C から H への堅非拡大写像の列, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像, $\{\lambda_n\}$ を $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < 2\alpha$ を満たす実数列とする。このとき, $\{T_n\}$ および $\{I - \lambda_n A\}$ は強非拡大列である。

補助定理 2.3 ([2, Theorem 3.4]). H を Hilbert 空間, C および D を H の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を D から H への写像の列, $\{T_n\}$ を C から H への写像の列とし, $\{S_n\}$ および $\{T_n\}$ は共に強非拡大列であり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(C) \subset D$ であると仮定する。このとき, 写像列 $\{S_n T_n\}$ は強非拡大列である。

補助定理 2.4 ([2, Corollary 3.8] または [3, Corollary 3.4]). H を Hilbert 空間, C および D を H の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を D から H への非拡大写像の列, $\{T_n\}$ を C から H への非拡大写像の列とする。さらに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_n) \neq \emptyset$$

であり, $\{S_n\}$ または $\{T_n\}$ のどちらかが強非拡大列であり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(C) \subset D$ であると仮定する。このとき, C の点列 $\{x_n\}$ が有界で, $x_n - S_n T_n x_n \to 0$ ならば $x_n - S_n x_n \to 0$ かつ $x_n - T_n x_n \to 0$ が成り立つ。

補助定理 2.5 ([3, Corollary 3.5]). H を Hilbert 空間, C および D を H の空でない部分集合, $S\colon D \to H$ を非拡大写像, $\{T_n\}$ を C から H への非拡大写像の列としとする。さらに

$$\mathrm{Fix}(S) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_n) \neq \emptyset$$

であり, $\{T_n\}$ は強非拡大列であり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n(C) \subset D$ であると仮定する。このとき, C の点列 $\{x_n\}$ が有界で, $x_n - ST_n x_n \to 0$ ならば $x_n - Sx_n \to 0$ かつ $x_n - T_n x_n \to 0$ が成り立つ。

C を H の空でない部分集合とし, $\{T_n\}$ を共通不動点を持つ C から H への写像の列とする。このとき,

- $\{T_n\}$ が条件 (B) を満たすとは, C の任意の有界集合 D および $\mathbb{N}$ の増加列 $\{n_i\}$ に

対して, 写像 $T\colon C \to H$ および $\{T_{n_i}\}$ の部分列 $\{T_{n_{i_j}}\}$ が存在して

$$F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \text{ かつ } \lim_{j\to\infty} \sup\left\{\left\|Ty - T_{n_{i_j}}y\right\| : y \in D\right\} = 0$$

が成り立つときをいう。

- $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $x_n - T_n x_n \to 0$ となる C の有界点列 $\{x_n\}$ の弱収積点がすべて $\{T_n\}$ の共通不動点になるときをいう。

3 均衡問題とリゾルベント

本節では, 均衡問題の定義と均衡問題の解の近似理論で利用されるリゾルベントと呼ばれる写像について説明する。

均衡問題とは次のような問題である。

問題 3.1 (均衡問題). H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数とする。このとき

$$f(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

を満たす $x \in C$ を求めよ。

均衡問題 (問題 3.1) の解の集合を $\mathrm{EP}(f)$ で表す。つまり

$$\mathrm{EP}(f) = \{x \in C : f(x, y) \geq 0, \forall y \in C\}$$

である。均衡問題は, 凸最小化問題, 不動点問題, 変分不等式問題, 相補性問題等を一般化した問題であると説明されることが多い。詳しくは, [9], [13, 14], [7] などを参照するとよい。

次節で, 均衡問題の解の近似について議論するが, そこではリゾルベントと呼ばれる写像を利用する。リゾルベントの存在を保証するのが次の補助定理である。

補助定理 3.2 ([4, 9, 11]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数で次の四つの条件を満たすと仮定する。

(F1) すべての $x \in C$ に対して, $f(x, x) = 0$;
(F2) すべての $x \in C$ に対して, 関数 $f(x, \cdot)\colon C \to \mathbb{R}$ は凸で下半連続;
(F3) すべての $x, y \in C$ に対して, $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$;

(F4) すべての $x, y \in C$ に対して, 関数 ϕ: $[0,1] \to \mathbb{R}$ は上半連続である。ただし, ϕ は $t \in [0,1]$ に対して $\phi(t) = f\big((1-t)x + ty, y\big)$ で定義される関数である。

このとき, すべての $x \in H$ および $r > 0$ に対して, 集合

$$F_r x = \left\{ z \in C : 0 \leq f(z,y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle, \forall y \in C \right\} \tag{3.1}$$

は一点集合である。

補助定理 3.2 の仮定のもとで, 1 価写像 F_r: $H \to C$ が定義できる。写像 F_r は, f の (r に関する) リゾルベントと呼ばれ, 次の性質を持つ。

補助定理 3.3. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数で補助定理 3.2 の (F1), (F2), (F3) および (F4) を満たすと仮定する。このとき, f のリゾルベントについて以下が成り立つ。

(1) すべての $r > 0$ に対して, $\mathrm{Fix}(F_r) = \mathrm{EP}(f)$;
(2) すべての $x, y \in H$ と $r, s > 0$ に対して, $\langle F_r x - F_s y, s(x - F_r x) - r(y - F_s y) \rangle \geq 0$;
(3) すべての $r > 0$ に対して, F_r は堅非拡大である;
(4) すべての $x \in H$ と $r, s > 0$ に対して, $r \|F_r x - F_s x\| \leq |r - s| \, \|x - J_r x\|$;
(5) $\mathrm{EP}(f) \neq \emptyset$ のとき, $\{F_{r_n}\}$ は条件 (Z) を満たす。ただし, $\{r_n\}$ は $\inf_n r_n > 0$ を満たす正の数列である。

証明. 式 (3.1) より

$$z = F_r z \Leftrightarrow 0 \leq f(z,y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - z \rangle = f(z,y), \forall y \in C \Leftrightarrow z \in \mathrm{EP}(f)$$

であるから, (1) が示せた。

再び式 (3.1) より, すべての $x, y \in H$ と $r, s > 0$ に対して, $F_r x, F_s y \in C$ だから

$$f(F_r x, F_s y) \geq \frac{1}{r} \langle F_s y - F_r x, x - F_r x \rangle,$$
$$f(F_s y, F_r x) \geq \frac{1}{s} \langle F_r x - F_s y, y - F_s y \rangle$$

が成り立つことがわかる。これらの不等式と条件 (F2) より

$$0 \geq f(F_r x, F_s y) + f(F_s y, F_r x)$$

$$\geq \frac{1}{r}\langle F_s y - F_r x, x - F_r x\rangle + \frac{1}{s}\langle F_r x - F_s y, y - F_s y\rangle$$

となり, (2) が示せた。

次に, (2) を使って (3) と (4) を示す。(2) で $r = s$ と仮定すると

$$\langle F_r x - F_r y, r(x - F_r x) - r(y - F_r y)\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \|F_r x - F_r y\|^2 \leq \langle F_r x - F_r y, x - y\rangle$$

が成り立つ。したがって, すべての $r > 0$ に対して, F_r は堅非拡大である。さらに (2) で, $x = y$ と仮定すると

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle F_r x - F_s x, s(x - F_r x) - r(x - F_s x)\rangle \\ &= \langle F_r x - F_s x, -r(F_r x - F_s x) + (s - r)(x - F_r x)\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって, シュワルツの不等式より

$$r\|F_r x - F_s x\|^2 \leq (s - r)\langle F_r x - F_s x, x - F_r x\rangle \leq |s - r|\,\|F_r x - F_s x\|\,\|x - F_r x\|$$

となり, (4) が示せた。

最後に, (5) を示す。(1) より, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(F_{r_n}) = \mathrm{EP}(f) \neq \emptyset$ である。$\{x_n\}$ を $x_n - F_{r_n} x_n \to 0$ を満たす H の有界点列とし, $x_{n_i} \rightharpoonup u$ とする。このとき, $u \in \mathrm{EP}(f)$ を示せばよい。s を正の定数とすると, (2) より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq \langle F_{r_n} x_n - F_s u, s(x_n - F_{r_n} x_n) - r_n(u - F_s u)\rangle$$

であるから, すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq -\left\langle F_{r_{n_i}} x_{n_i} - F_s u, u - F_s u\right\rangle + \frac{s}{r_{n_i}}\left\langle F_{r_{n_i}} x_{n_i} - F_s u, x_{n_i} - F_{r_{n_i}} x_{n_i}\right\rangle$$

が成り立つ。ここで, $F_{r_{n_i}} x_{n_i} \rightharpoonup u$, $\{1/r_n\}$ および $\{F_{r_n} x_n\}$ は有界, $x_{n_i} - F_{r_{n_i}} x_{n_i} \to 0$ であるから, 上式で $j \to \infty$ とすると

$$0 \leq -\langle u - F_s u, u - F_s u\rangle = -\|u - F_s u\|^2$$

が得られ, $u = F_s u$, つまり, $u \in \mathrm{Fix}(F_s) = \mathrm{EP}(f)$ である。したがって, $\{F_{r_n}\}$ は条件 (Z) を満たすことが示せた。 □

補助定理 3.3 により, 均衡問題 (問題 3.1) を (堅) 非拡大写像の不動点問題へと書き換えられることがわかる。

4 均衡問題に関する収束定理

本節では, 均衡問題の解の近似に関する収束定理を二つ取り上げ, それらと関係が深い非拡大写像の列に関する収束定理を紹介する。

4.1 不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理

Moudafi は文献 [15] で次の問題を議論した。

問題 4.1. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数, $T\colon C \to C$ を非拡大写像, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像とし, f は補助定理 3.2 の (F1), (F2), (F3) および (F4) を満たすと仮定する。このとき, $z \in \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP}$ を求めよ。ここで

$$\mathrm{EP} = \{x \in C : f(x, y) + \langle y - x, Ax\rangle \geq 0,\ \forall y \in C\}$$

である。

問題 4.1 の仮定のもとで, すべての $r > 0$ に対して

$$\mathrm{EP} = \mathrm{Fix}\bigl(F_r(I - rA)\bigr) \tag{4.1}$$

が成り立つことがわかる。実際

$$f(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - (I - rA)z\rangle = f(z, y) + \langle y - z, Az\rangle$$

より

$$z \in \mathrm{Fix}\bigl(F_r(I - rA)\bigr) \Leftrightarrow z = F_r(I - rA)z \Leftrightarrow z \in \mathrm{EP}$$

である。

Moudafi は, 問題 4.1 に関連する次の定理を示した。

定理 4.2 ([15, Theorem 3.1]). H, C, f, T および A は問題 4.1 と同じとし, $\{r_n\}$ を $[a, b]$ の, $\{\alpha_n\}$ を $[c, d]$ の数列とする。ただし, $0 < a \leq b < 2\alpha$, $0 < c \leq d < 1$ である。さらに, $\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP} \neq \emptyset$ を仮定し, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(y_n, y) + \langle y - y_n, Ax_n\rangle + \frac{1}{r_n}\langle y - y_n, y_n - x_n\rangle \geq 0,\ \forall y \in C; \tag{4.2}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Ty_n \tag{4.3}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $u \in D$ に弱収束する。ただし, $D = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP}$, $u = \lim_{n\to\infty} P_D(x_n)$ である。

定理 4.2 は, 次の非拡大写像の列に関する収束定理と関係がある。

定理 4.3 ([1, Lemma 3.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\{\alpha_n\}$ を $[c, d]$ の数列, $\{S_n\}$ を C から C への非拡大写像の列とする。ただし, $0 < c \leq d < 1$ であり, 以下を仮定する。

(1) $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n) \neq \emptyset$;
(2) $\{S_n\}$ は条件 (B) を満たす。

このとき, $x_1 = x \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n x_n$ で定義される点列 $\{x_n\}$ は, $u \in F$ に弱収束する。ここで, $u = \lim_{n\to\infty} P_F(x_n)$ である。

定理 4.3 を使って, 定理 4.2 を証明してみよう。

定理 4.2 の証明. まず

$$\begin{aligned} &F_{r_n}(I - r_n A)x_n \\ &\quad = \left\{ z \in C : 0 \leq f(z,y) + \frac{1}{r_n} \langle y - z, z - (x_n - r_n A x_n) \rangle, \ \forall y \in C \right\} \\ &\quad = \left\{ z \in C : 0 \leq f(z,y) + \langle y - z, A x_n \rangle + \frac{1}{r_n} \langle y - z, z - x_n \rangle, \ \forall y \in C \right\} \end{aligned}$$

であるから, 式 (3.1) と (4.2) より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $y_n = F_{r_n}(I - r_n A)x_n$ である。したがって, $S_n = TF_{r_n}(I - r_n A)$ とおくと, 式 (4.3) を

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T F_{r_n}(I - r_n A) x_n \\ &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n x_n \end{aligned}$$

と書き換えることができる。また, S_n は非拡大であることも容易にわかる。よって

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n) = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP} \neq \emptyset$;
(2) $\{S_n\}$ が条件 (B) を満たすこと

を示せば, 定理 4.3 より定理 4.2 の結論が得られる。

F_{r_n} は堅非拡大, $I - r_n A$ は強非拡大であるから, $F_{r_n}(I - r_n A)$ は強非拡大である。また, (4.1) と仮定より

$$\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}\big(F_{r_n}(I - r_n A)\big) = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP} \neq \emptyset$$

であるから, 補助定理 2.1 より

$$\mathrm{Fix}(S_n) = \mathrm{Fix}\big(TF_{r_n}(I - r_nA)\big) = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}\big(F_{r_n}(I - r_nA)\big) = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP}$$

が成り立つ。したがって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n) = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP} \neq \emptyset$$

である。

次に, $\{S_n\}$ が条件 (B) を満たすことを示す。D を空でない C の有界部分集合, $\{n_i\}$ を $\mathbb{N}$ の増加列とする。このとき, $\{r_{n_i}\}$ の部分列で収束するものが存在する。いま $r_{n_{i_j}} \to s \in [a, b]$ とし, $S = TF_s(I - sA)$ とおく。すると, 前半の議論と同様にして

$$\mathrm{Fix}(S) = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{EP} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n)$$

である。T は非拡大, F_{r_n} は堅非拡大であることと補助定理 3.3(4) より, すべての $y \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|Sy - S_ny\| &= \|TF_s(I - sA)y - TF_{r_n}(I - r_nA)y\| \\
&\leq \|F_s(I - sA)y - F_{r_n}(I - r_nA)y\| \\
&\leq \|F_s(I - sA)y - F_{r_n}(I - sA)y\| + \|F_{r_n}(I - sA)y - F_{r_n}(I - r_nA)y\| \\
&\leq \frac{|s - r_n|}{s} \|(I - sA)y - F_s(I - sA)y\| + \|(I - sA)y - (I - r_nA)y\| \\
&\leq |s - r_n| \left(\frac{1}{s} \|(I - sA)y - F_s(I - sA)y\| + \|Ay\| \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。$I - sA$, F_s は共に非拡大, A は Lipschitz 連続であるから

$$M = \sup \left\{ \frac{1}{s} \|(I - sA)y - F_s(I - sA)y\| + \|Ay\| : y \in D \right\} < \infty$$

である。したがって

$$\lim_{j \to \infty} \sup \left\{ \left\| Sy - S_{n_{i_j}}y \right\| : y \in D \right\} \leq \lim_{j \to \infty} \left| s - r_{n_{i_j}} \right| M = 0$$

が成り立つ。以上より, $\{S_n\}$ が条件 (B) を満たすことが示せた。 □

4.2 不動点問題, 変分不等式問題, 均衡問題の共通解への収束定理

次に, 均衡問題の解の近似に関する強収束定理を扱った文献 [17] を取り上げる。文献 [17] では次の問題が議論されている。

問題 4.4. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数, $T\colon C \to C$ を非拡大写像, $A\colon C \to H$ を α-逆強単調写像とし, f は補助定理 3.2 の (F1), (F2), (F3) および (F4) を満たすと仮定する。このとき, $z \in \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \cap \mathrm{EP}(f)$ を求めよ。ここで

$$\mathrm{VI}(C, A) = \{x \in C : \langle y - x, Ax\rangle \geq 0, \forall y \in C\}$$

である。

問題 4.4 の $\mathrm{VI}(C, A)$ は A に関する変分不等式問題の解の集合であり, すべての $\lambda > 0$ に対して

$$\mathrm{Fix}\big(P_C(I - \lambda A)\big) = \mathrm{VI}(C, A) \tag{4.4}$$

が成り立つことが知られている (例えば, [20] を参照)。

文献 [17] では, [21] で導入された射影法を用いて次の定理を得ている。

定理 4.5 ([17, Theorem 3.1]). H, C, f, T および A は問題 4.4 と同じとし, x を H の点, $\{\lambda_n\}$ を $[a, b]$ の, $\{\alpha_n\}$ を $[0, c]$ の, $\{r_n\}$ を $[d, \infty)$ の数列とする。ただし, $0 < a \leq b < 2\alpha$, $0 \leq c < 1$, $d > 0$ である。さらに, $\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \cap \mathrm{EP}(f) \neq \emptyset$ を仮定し, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T P_C (I - \lambda_n A) F_{r_n} x_n; \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}; \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_D(x)$ に強収束する。ここで, $D = \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \cap \mathrm{EP}(f)$ である。

定理 4.5 は, 次の非拡大写像列に関する収束定理と関係がある。

定理 4.6 ([6, Theorem 3.4]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, x を H の点, $\{S_n\}$ を共通不動点を持つ C から H への非拡大写像の列, $\{\alpha_n\}$ を区間 $[0, c]$ の

数列とする。ただし, $0 \leq c < 1$ である。さらに, $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たすと仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n x_n; \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する。ただし, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ である。

定理 4.6 を使って定理 4.5 を証明してみよう。

定理 4.5 の証明. $S_n = TP_C(I - \lambda_n A)F_{r_n}$ とおく。ここで, 等式

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n) = D \neq \emptyset \tag{4.6}$$

および $\{S_n\}$ が条件 (Z) を満たすことを示せばよい。

式 (4.4) と補助定理 3.3(1) より $\mathrm{Fix}\big(P_C(I - \lambda_n A)\big) = \mathrm{VI}(C, A)$, $\mathrm{Fix}(F_{r_n}) = \mathrm{EP}(f)$ であるから, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{Fix}(TP_C(I - \lambda_n A)) \cap \mathrm{Fix}(F_{r_n}) \supset D \neq \emptyset,$$
$$\mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(P_C(I - \lambda_n A)) \supset D \neq \emptyset$$

が成り立つ。$P_C(I - \lambda_n A)$ および F_{r_n} は強非拡大であるから, 補助定理 2.1 を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(S_n) &= \mathrm{Fix}\big(TP_C(I - \lambda_n A)F_{r_n}\big) \\ &= \mathrm{Fix}\big(TP_C(I - \lambda_n A)\big) \cap \mathrm{Fix}(F_{r_n}) \\ &= \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}\big(P_C(I - \lambda_n A)\big) \cap \mathrm{Fix}(F_{r_n}) = D \end{aligned}$$

を得る。よって (4.6) が示せた。

次に, $\{S_n\}$ が条件 (Z) を満たすことを示す。$\{y_n\}$ を $y_n - S_n y_n \to 0$ を満たす C の有界点列とし, $y_{n_i} \rightharpoonup u$ とする。C は閉凸であるから $u \in C$ であり, 前半の議論から

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}\big(TP_C(I - \lambda_n A)\big) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(F_{r_n}) = D \neq \emptyset$$

が成り立つ。また, $\{TP_C(I - \lambda_n A)\}$ は非拡大写像の列であり, 補助定理 2.2 より $\{F_{r_n}\}$ は強非拡大列だから, 補助定理 2.4 により

$$y_n - TP_C(I - \lambda_n A)y_n \to 0, \tag{4.7}$$

$$y_n - F_{r_n} y_n \to 0 \tag{4.8}$$

であることがわかる。補助定理 3.3(5) と (4.8) より $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(F_{r_n}) = \mathrm{EP}(f)$ を得る。次に, 補助定理 2.2 および 2.3 より $\{P_C(I - \lambda_n A)\}$ が強非拡大列であることと

$$\mathrm{Fix}(T) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}\big(P_C(I - \lambda_n A)\big) \supset D \neq \emptyset,$$

(4.7) より補助定理 2.5 を使うと

$$y_n - Ty_n \to 0, \tag{4.9}$$
$$y_n - P_C(I - \lambda_n A) y_n \to 0 \tag{4.10}$$

を得る。$I - T$ は demiclosed であるから, (4.9) より $u \in \mathrm{Fix}(T)$ である。さらに, 一般性を失うことなく, $\{y_{n_i}\}$ に対応する $\{\lambda_n\}$ の部分列 $\{\lambda_{n_i}\}$ は収束すると仮定してよいので, $\lambda_{n_i} \to \lambda \in [a, b]$ とする。P_C は非拡大であり, A は Lipschitz 連続であるから, (4.10) より

$$\begin{aligned}
&\|y_{n_i} - P_C(I - \lambda A) y_{n_i}\| \\
&\quad \le \|y_{n_i} - P_C(I - \lambda_{n_i} A) y_{n_i}\| + \|P_C(I - \lambda_{n_i} A) y_{n_i} - P_C(I - \lambda A) y_{n_i}\| \\
&\quad \le \|y_{n_i} - P_C(I - \lambda_{n_i} A) y_{n_i}\| + \|(I - \lambda_{n_i} A) y_{n_i} - (I - \lambda A) y_{n_i}\| \\
&\quad \le \|y_{n_i} - P_C(I - \lambda_{n_i} A) y_{n_i}\| + |\lambda - \lambda_{n_i}| \, \|A y_{n_i}\| \to 0
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。$P_C(I-\lambda A)$ は非拡大であるから, $I - P_C(I-\lambda A)$ が demiclosed であることに注意すると, $u \in \mathrm{Fix}\big(P_C(I - \lambda A)\big) = \mathrm{VI}(C, A)$ を得る。以上より, $u \in D$ であるあり, $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たすことが示せた。 □

なお, 定理 4.5 は, 文献 [5] にある結果からも同様な方法で導くことができる。

5 まとめと今後の課題

近年, 均衡問題の解の近似に関する様々な結果が報告されているが, それらの多くはリゾルベントを用いた結果である。第 3 節で述べた通り, リゾルベントは非拡大写像で, その不動点集合と均衡問題の解の集合が一致する。したがって, 均衡問題の解の近似に関する結果の多くは, ある条件を満たす非拡大写像列の共通不動点の近似に関する議論に含まれてしまう。

また, 本稿では詳しく触れなかったが, 問題 3.1(均衡問題) が与えられたとき, それを同値な極大単調作用素の零点問題に書き換えることができる (詳しくは, [4, 8] を参照)。し

たがって, この設定の均衡問題を議論するよりも, 最初から極大単調作用素の零点問題を取り上げた方が, より一般的ととらえることもできる。

以上を踏まえると, 問題 3.1 より弱い条件のもとでの解の近似方法, 特に, リゾルベントを使わない解の近似方法が今後の課題の一つである。

参考文献

[1] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Sci. Math. Jpn. **66** (2007), 89–99.

[2] ———, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **8** (2007), 471–489.

[3] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[4] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

[5] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[6] ———, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis, to appear (doi:10.1016/ j.na.2009.02.001).

[7] 青山耕治, 高橋渉, 『不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理』, 非線形解析学と凸解析学の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1544** (2007), 40–48.

[8] ———, 『極大単調作用素と均衡問題』, バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用, 京都大学数理解析研究所講究録 **1615** (2008), 107–116.

[9] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[10] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[11] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[12] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] A. N. Iusem and W. Sosa, *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Anal. **52** (2003), 621–635.

[14] ———, *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization **52** (2003), 301–316.

[15] A. Moudafi, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and equilibrium problems*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 37–43.

[16] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[17] R. Shinzato and W. Takahashi, *A strong convergence theorem by a new hybrid method for an equilibrium problem with nonlinear mappings in a Hilbert space*, Cubo **10** (2008), 15–26.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[19] 高橋渉, 『凸解析と不動点近似』, 横浜図書, 2000.

[20] ———, 『非線形・凸解析学入門』, 横浜図書, 2005.

[21] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.